

Da distanze a coordinate

Donato Saeli

Potenza 2018

Di solito date le coordinate di due punti si richiede di determinare la loro distanza. Qui esaminiamo un sorta di problema “inverso” particolare, suggerito da G. Lino.

Fissati a priori i tre punti $P_1 \equiv (a, 0, 0)$, $P_2 \equiv (0, a, 0)$ e $P_3 \equiv (0, 0, a)$ [†] e dato un punto $Q \equiv (x, y, z)$, di cui sono note le distanze d_1 , d_2 e d_3 da P_1 , P_2 e P_3 rispettivamente, determinarne le coordinate.

Possiamo scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = d_1^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = d_2^2 \\ x^2 + y^2 + (z-a)^2 = d_3^2, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = d_1^2 - a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = d_2^2 - a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2az = d_3^2 - a^2. \end{cases} \quad (1)$$

A questo punto occorre notare che se si dispone anche della distanza d_0 di Q dall'origine O degli assi, poiché $d_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, il sistema (1) porge immediatamente la soluzione

$$\begin{cases} x = (a^2 + d_0^2 - d_1^2)/2a = (d_0 - d_1)(d_0 + d_1)/2a + a/2 \\ y = (a^2 + d_0^2 - d_2^2)/2a = (d_0 - d_2)(d_0 + d_2)/2a + a/2 \\ z = (a^2 + d_0^2 - d_3^2)/2a = (d_0 - d_3)(d_0 + d_3)/2a + a/2. \end{cases}$$

Nel caso (se possibile da evitare) che d_0 non sia noto, sottraendo nel sistema (1) la seconda e la terza equazione dalla prima otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = d_1^2 - a^2 \\ 2ay - 2ax = d_1^2 - d_2^2 \\ 2az - 2ax = d_1^2 - d_3^2, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = d_1^2 - a^2 \\ y = x + (d_1^2 - d_2^2)/2a \\ z = x + (d_1^2 - d_3^2)/2a. \end{cases} \quad (2)$$

[†] $a > 0$, la scelta di questi punti appare opportuna dal punto di vista delle applicazioni pratiche e semplifica calcoli già sufficientemente complicati.

La prima delle (2) è l'equazione delle superficie sferica σ_1 con centro in P_1 e raggio d_1 . La seconda e la terza delle (2) sono le equazioni della retta ρ che interseca σ_1 in Q e Q' punto questo simmetrico a Q rispetto al piano π , passante per i punti P_1, P_2 e P_3 , di equazione $x + y + z = a$; infatti ρ rimane ortogonale a π .

Rimpiazzando nella prima delle (2) le variabili y e z con le espressioni a secondo membro delle altre due, otteniamo la seguente equazione:

$$x^2 + \frac{x^2 + x(d_1^2 - d_2^2)/a + (d_1^2 - d_2^2)^2/4a^2 + x^2 + x(d_1^2 - d_3^2)/a + (d_1^2 - d_3^2)^2/4a^2}{2} - 2ax = d_1^2 - a^2.$$

Posto $D_2 = (d_1^2 - d_2^2)/2a$ e $D_3 = (d_1^2 - d_3^2)/2a$,

il sistema (2) assume la forma:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2(D_2 + D_3 - a)x + D_2^2 + D_3^2 - d_1^2 + a^2 = 0 \\ y = x + D_2 \\ z = x + D_3; \end{cases} \quad (3)$$

dove la prima equazione, di secondo grado in x , ha discriminante

$$\Delta = 4 \{ 3d_1^2 + 2 [D_2 D_3 - a(a + D_2 + D_3) - D_2^2 - D_3^2] \}$$

e soluzioni

$$x = \frac{a - D_2 - D_3 \mp \sqrt{\Delta/4}}{3}.$$

Se $\Delta > 0$, il sistema (3)[‡] ammette le due soluzioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a - D_2 - D_3 - \sqrt{\Delta/4}}{3}, & x_2 &= \frac{a - D_2 - D_3 + \sqrt{\Delta/4}}{3}, \\ y_1 &= \frac{a + 2D_2 - D_3 - \sqrt{\Delta/4}}{3}, & y_2 &= \frac{a + 2D_2 - D_3 + \sqrt{\Delta/4}}{3}, \\ z_1 &= \frac{a - D_2 + 2D_3 - \sqrt{\Delta/4}}{3}, & z_2 &= \frac{a - D_2 + 2D_3 + \sqrt{\Delta/4}}{3}. \end{aligned}$$

Queste sono le coordinate dei punti Q e Q' (che non giacciono su π).

Se $|\Delta|$ è molto piccolo, Q è molto prossimo a π e quindi anche a Q' ; potrebbe essere difficile stabilire quale dei due punti è Q .

Se $\Delta = 0$, Q coincide con Q' e giace su π . Come nel caso precedente, i calcoli potrebbero diventare critici e causare scarsa precisione.

Se infine $\Delta < 0$, qualcuna fra le rilevazioni di d_1, d_2 e d_3 è errata.

In pratica, fissato a (valori suggeriti sono $1/2$, oppure 1), conviene scrivere un programma che calcoli nell'ordine, $D_2, D_3, a - D_2 - D_3, \Delta/4$ ed infine (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) .

[‡] I sistemi (3), (2) e (1) sono equivalenti

Nel programma che segue (in linguaggio C), d_1 , d_2 e d_3 vengono passati (nell'ordine) come parametri. Viene fissato $a = 1$, per ogni altra scelta basta modificare la riga relativa (commentata).

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main (int argc, char *argv[])
{ float a, b, c, d1, d2, d3, p, q, s, x, y, z;
  if (argc != 4) exit(EXIT_FAILURE);
  sscanf (argv[1], "%f", &d1);
  sscanf (argv[2], "%f", &d2);
  sscanf (argv[3], "%f", &d3);
  a = 1; /* Modificare se occorre */
  b = (d1 - d2) / 2;
  b = b / a;
  b = b * (d1 + d2);
  c = (d1 - d3) / 2;
  c = c / a;
  c = c * (d1 + d3);
  p = b + c - a;
  q = (a * a) + (b * b) + (c * c) - (d1 * d1);
  s = (p * p) - (3 * q);
  if (abs(s) < .0001)
  { x = - p;
    x = x / 3;
    printf ("\n\t%f\t%f\t%f\n\n", x, x+b, x+c);
    exit(EXIT_SUCCESS);
  }
  if (s > 0)
  { printf ("\nCoordinate:\n");
    x = sqrt(s) - p;
    x = x / 3;
    printf ("\n\t%f\t%f\t%f\n", x, x+b, x+c);
    x = - sqrt(s) - p;
    x = x / 3;
    printf ("\n\t%f\t%f\t%f\n\n", x, x+b, x+c);
  }
  else
  { printf ("\nDati incompatibili.\n\n");
  }
}
```

Concludiamo con due esempi:

ESEMPIO 1. Disastro! Con le distanze arrotondate ai centesimi i risultati sono del tutto sballati. Naturalmente Q (coincide con Q' e) sta su π .

```
$ ./di2co 6.16441400297 6.16441400297 4.89897948557
```

```
      -2.000000      -2.000000      4.999999
```

```
$ ./di2co 6.164414 6.164414 4.898979
```

```
      -2.000000      -2.000000      5.000000
```

```
$ ./di2co 6.164 6.164 4.899
```

Coordinate:

```
      -1.914603      -1.914603      5.082744
```

```
      -2.083628      -2.083628      4.913718
```

```
$ ./di2co 6.16 6.16 4.9
```

Coordinate:

```
      -1.690980      -1.690980      5.276819
```

```
      -2.287553      -2.287553      4.680245
```

ESEMPIO 2.

```
$ ./di2co 5.09901951359 4.89897948557 4.69041575982
```

Coordinate:

2.000000	3.000000	4.000000
-3.333333	-2.333334	-1.333333

```
$ ./di2co 5.09902 4.898979 4.690416
```

Coordinate:

1.999998	3.000002	4.000000
-3.333335	-2.333331	-1.333333

```
$ ./di2co 5.099 4.899 4.690
```

Coordinate:

1.999138	2.998937	4.000988
-3.333570	-2.333771	-1.331720

```
$ ./di2co 5.1 4.9 4.69
```

Coordinate:

1.997149	2.997148	4.004098
-3.335114	-2.335115	-1.328165